

1 次方程式の速さの文章題における困難の在りかについて

—大学生はどうとらえたか—

数学科 松原敏治

第1節 内観的方法

1. 1 次方程式における速さの文章題について

何年かごとに中学1年生の数学を教えるのだが、その際、こちらも生徒に教えにくく、また、生徒も今一つ、わかったという表情を見せない問題がある。それが「1 次方程式の応用」の単元の「速さの文章題」である。具体的には、次のような問題をさす。

弟は学校へ行くために8時に家を出た。兄は弟が出てから4分後に家を出て弟を追いかけた。
弟は毎分50m、兄は毎分70mの速さで歩くとすると、兄は家を出てから何分後に弟に追いつきますか。
(東京書籍 新編 新しい数学 1年)

この問題を1 次方程式の応用の授業で取り上げると、生徒から必ず2種類の反応が返ってくる。

一つは、「速さ」という言葉が出てきただけで思考を停止してしまう、という反応。これは当然、算数、数学があまり得意でない生徒から返ってくることが多い。また、思考は停止しないものの、考えにくそうな表情をしている生徒は多数いる。

もう一つは、小学校でやった算数の考え方で考えた方が考えやすい、という反応。これは、小学校で算数が得意だった生徒から返ってくることが多い。こういう生徒には「方程式を立てる練習をする単位だから」といって方程式で考えさせるわけだが、彼等はあまり納得しない。なぜ、わざわざわかりにくい方法を使うのだろうかという疑問をいただくようだ。

以上のような生徒からの反応に対し、指導方法の工夫は行ってきたのだが、どうも、思ったように効果があがらない。根本的なところで、このような反応が返ってくる原因の追求が足りないのではなかと考えるようになった。

2. 「わからない」時のことはなかなか思い出せない

人間は、あることができるようになると、できなかった時のことはなかなか思い出せなくなる。このことは、どんな人にとっても、また、どんなことについてもほぼ共通にいえることである。

たとえば、自転車に乗れる人にとっては、自転車に乗れなかった時のことはなかなか思い出せないし、また、どのようにして乗れるようになったかもだんだん忘れてしまう。

このため、自転車に乗れる人が、乗り方を練習している人に自転車の乗り方を説明しようと思うと、「体のバランスをとって」などと、抽象的な説明になってしまう。これでは抽象的すぎて、乗り方を練習している人にとっては、あまり役に立たない。なぜなら、乗り方を練習している人は、その「体のバランスのとり方」がわからないのだから。

もう少し、練習している人に役立つ説明はないものだろうか。

数学においても似たようなことがいえると考えられる。

今、話題にしている方程式の応用問題の立式についても、教科書には、方程式を使って問題を解く手順として、次のように書かれている。

- ①問題の意味をよく考え、何を x で表すかを決める。
- ②問題にふくまれている数量を、 x を使って表す。
- ③それらの数量の間の関係をみつけて、方程式をつくる。
- ④つくった方程式を解く。
- ⑤方程式の解が問題に適していることを確かめ答えとする。

(東京書籍 新編 新しい数学 1年)

もちろん書かれていることはその通りなのだが、これも先程の自転車の例と同じで、方程式の応用問題を初めて学ぼうという生徒にとっては、抽象的すぎてあまり役に立たない。

①の「問題の意味をよく考え」のところ、③の「数量の間の関係をみつけて」のところ、いずれも生徒にすれば、「では、具体的にはどうすればよいのか」と思わず聞き返したくなるような記述である。

もう少し、方程式の応用問題を初めて学ぶ生徒に役立つ説明はないのだろうか。

3. 内観的方法について

教師向けの数学教育の本は、数学が理解できている大人の観点から、理解できていない子どもを見る、という立場に立っていることが多い。これは、当然といえば当然のことである。

しかし、この立場では、子どもがどこに困難を感じるかはわからない。なぜなら、視点が大人の目の高さにあるからである。

したがって、子どもがあるところ、たとえば方程式における速さの文章題において、理解が困難になったとしても、一般的なこと（たとえば図や表を書いてみなさいなど）しかいえない。それができないから理解が困難なのに、である。

では、どうすればよいのであろうか。

ここで、次のような事実に注目したい。

それは、生徒にとって、ある数学の問題について、教師からの説明より、友達がしてくれた説明の方がよくわかることがある、という事実である。

これは、数学的思考が身につけてしまった教師の説明より、身につける過程の途中にある同年代の友達の説明の方が実感できる、という意味ととらえられる。あるいは、説明するときの視点が自分と同じ目の高さにあるのでわかりやすい、という言い方もできるであろう。

友達は、無意識のうちに、「わかっている」大人の視点と、直前まで自分がそうであった「わからない」子どもの視点をうまく行き来しながら説明していると考えられる。

この「視点を移動させながらの説明」という方法を意識的に取り入れることによって、今、とらえようとしている、方程式における速さの文章題の困難の在りかを少しでも明らかにできないであろうか。

大人が視点を移動するためには、まず、自分がかつてまだ数学を理解していなかったころの体験的実感を記憶のなかによびおこし、あるいは、数学を理解していない子どものつぶやきや文章を資料として使い、自分の中に子どもの視点を再現しなければならない。

そして、こうやって再現された子どもの視点と、数学を理解している現在の自分の視点との落差を追求

することによって、子どもにとっての困難の在りかを考えていく。

このような、視点を移動させながら子どもにとっての困難の在りかを考えていく方法を、内観的方法と名づけることにする。(注1)

4. 大学生は速さの文章題における困難の在りかをどうとらえたか

筆者は、今年度、金沢大学教育学部で2年生対象の数学科教育法の非常勤講師を勤めたのだが、講義の時、学生に、1次方程式の速さの文章題はなぜ子どもにとって難しいのかを、自分の経験などをもとに考えてみよ、という課題でレポートを書かせた。

その結果、大学生は中学生に年齢的に近いこともあって、中学時代の経験を生き生きと語ったものがたくさん提出された。

ここでは、このレポートに書かれた学生の経験を整理し、中学生の視点からみた1次方程式の速さの文章題における困難の在りかについて内観的方法によって考える手がかりとしたい。

なお、レポートを提出した学生は18名である。

学生には最初の問題を例として示した。

第2節 学生のレポートの記述から

1. 文章題ということで。文章のつながりがわからないということ

予想外だったのは、速さの問題ということ以前に、問題が文章で表されているという、それだけで、苦手意識を持ったり、文章から自分で考えて式を作らなければならないということから苦手意識を持ってしまう経験をした学生が以外に多かったことである。

「文章題が解けないのは、一般に『国語力がないからだ』といわれるが、国語力という大げさなものではなく、国語が苦手というより、文を読むのがつらい、長い文をみると読むこともあきらめてしまう、どうせ難しいだろうから解けないだろう、と考える。」(Y君)

「『文章題＝難しい』という意識を持っている子どもはけっこう沢山いると思う。(私もそうだったから、特にそう思うのだが。) 解く前から『難しいんだ』とっていてそれから取り組むのは、『簡単だ』『できる』とっていて取り組むことに比べて、解ける率が下がるのではないかと思った。」(Iさん)

「問題が文章になっていることが一番の難しさである。(中略)『これを計算しろ』だったら解ける生徒はたくさんいるのだろう。しかし、『～君が毎分Omで走って』とある時点でもうお手あげ。頭の中で問題の中に出てくる数字を使って、どうにか式を作って答えを出す、常識で考えてもわかるほど有り得ない大きい値が出てしまいやり直し。周りのみんなが解ける中、また有り得ない値がでる。焦れば焦るほどわからなくなり、結局先生の答えを聞いてわかった気になる。問題が文章になっただけでいろんなことを考えてしまい、答えが出せず最終的に先生任せになってしまう。」(A君)

「文章題というものが簡単なものを難しくさせているのだと思う。上の問題にしても、『弟が8時に家を

出て、兄が8時4分に家を出た』ということなのに、なんとなくわかりにくい。」(Nさん)

以上については、文章題ということそれ自体が困難の原因である。という、経験をもとにした意見である。なお、文章題の文章の表現と問題解決の難しさの関係については、すでに研究がある。

「鳥が8羽います。虫は5匹います。鳥のほうが虫よりなん羽多いですか。」という問題と、「鳥が8羽います。虫は5匹います。鳥1羽が、虫を1匹ずつつかまえるとすると、何羽の鳥が虫をつかまえられませんか。」という問題では、幼稚園児を対象にした実験では正解率が4倍違ったという。(ハドソン, 1983) (注2)

実は最初の問題でも、文章の表現を少し変えるだけで、かなり、理解のしやすさが変わると考えられる。(注3) このことについては今後研究を進めていきたい。

次に、1つ1つの文章はわかるのだが、そのつながりがわからないために、文章題が難しくなる、という意見を取り上げる。

「文章題の1つ1つの文章に含まれている情報を個別には理解できるが、頭の中で、それらのつながりが理解できない。例えば、上の文章題では、弟が毎分50mの速さで歩く、兄は毎分70mの速さで歩く、兄は弟の4分後に出た、などは理解できるが、それらがどういう関係でつながっていて、何分後という答えが出るのか、を、みちびくことができないということである。考えと考えがうまくつながらず、思考の連続性がみられないときには、何をしたらよいかなど、わかるはずもないと思われる。」(S君)

ただし、文章題の中でも、S君のことは借りれば、『考えと考えがうまくつながる』ときには、『思考の連続性』があることになり、何をしたらよいかわかるわけである。

では、どういうときに、『考えと考えがうまくつながる』のか。それについての意見がある。

「文章題が得意な人と、苦手な人との問題の読み取り方はどのような違いがあるのか。それは文章題を読んだときに、全体像を思い浮かべることができるかどうかによると思う。苦手な子は部分部分を単独に考えてしまってつなげて考えることができないのだ。得意な子はその部分部分がどのような関わりを持っていて、ある程度解き方の全体像を思い浮かべることができるのである。」(Nさん)

Nさんは昔から算数、数学が好きで、文章題が苦手だと思ったことはなかったとのことだが、家庭教師をしている女の子が文章題が苦手な自覚があることとしないことである。そこで上の分析が出てきた。

ただ、彼女のいう『解き方の全体像』はどうすれば思い浮かべることができるようになるのかは、この分析からだけではわからない。

2. 速さという概念がわかりにくいので。速さの単位がわかりにくいので

我々は「速さ」というものの存在を疑っておらず、「速さ」というものがあるという前提で論議を進めようとしている。しかし、子どもにとっては、速さの存在はそんなに明らかなものではなさそうだ。

「時間や距離は日頃の生活でなんらか関わっている。例えば、時間については、今何時か、そして授業が

あと何分で終わるかをみるために時計を見る。距離はグランド一周があと何mあり、マラソンコースが何kmある、ということで、正確ではないが、おおよその距離感はある。

しかし、速さに関しては、ほとんどといっていいほど日頃使わず、馴染みのない概念である。18歳になって、車の免許を取り始めるときになってようやく、速さが少し身近に案じるくらいである。中学生が親の車に乗っていて、今50km/時で走っているとわかって、それが1時間に50km走るから10分では何kmで…と演繹的に考えることはほとんどないといっていいだろう。また、家から学校まで通うのに、自転車で何分かかり、大体何kmあるということは分かっている、そこから速さまで算出することはしない。それだけ速さは中学生にとって、捉えにくい、抽象的なことなのである。」(Sさん)

「中学生の中の速さの概念は『はやい』『おそい』など、具体的な数字を使用しない形、つまり、漠然とした形で存在しているのではないだろうか。例えば日常の会話で『家から学校まで何分かかかる?』という質問に対して『速く歩けば△分でつくよ。』とか、『車(速いという感じを受ける言葉)で▲分だよ。』と答える子どもがいたとしても『時速○kmで歩けば△分だよ。』という子どもはいないだろう。

速さというものが、ふだん生活するうえで、数字化されるとすれば、車等の速度メーターなどぐらいであり、中学生のなれ親しんでいるものの中にはあまり存在しない。このことが、中学生の中で、速さの概念を漠然とさせ、速さの問題を難しくさせている。

また、普通、歩く速度にしても、自転車の速度にしても、速さは『おそく』なったり、『はやく』なったり、変化するものなので、ずっと同じ、つまり『一定の速さ』が存在するという部分も速さというものの難しさの一つである。」(Sさん)

「『速さ』というのが生徒には実感として出てきにくい。個数とかなら、日常的なものとしてとらえやすいが、『速さを求める』というのは非日常的である。さらにこの『求める速さ』というのは『平均の速さ』であって、車のスピードメータにあるような『瞬間の速さ』ではないから馴染みはほとんど無いといってよいし、むしろ、スピードメータの『瞬間の速さ』を知っていることが混乱をまねいて、難しさを助長させているのかもしれない。」(Y君)

「『速さ』という目に見えないものを数字で表していることが難しさの一つである」(A君)

以上のような意見を聞くと、「速さの概念を中学生はわかっている」という教師の前提も一度考えなければならぬのではないかと考えられる。

次に、「速さ」がわかりにくい原因の一つに単位があるということを述べたものをとりあげる。

「分速というのが日常ほとんど使われていないので理解しにくい。親の車に乗ったことがあると思うので時速の方がまだイメージしやすいのでないか。」(M君)

「単位がからむことが速さをわかりにくくしている。距離にはm, km, cmなどの単位があり、時間には、秒、分、時間などの単位があり、速度においては距離の単位と時間の単位が複雑にからみあることになる。例えば、50km/時と60km/時ではどちらが速いかすぐわかるが、3秒で100 mすすむ車と時速

50kmの車ではどちらが速いかすぐには思いつかない。」(S君)

以上のように速さという概念や速さの単位がわかりにくいことが速さの問題を難しくしている原因の1つととらえている意見がかなりあった。

3. 距離・速さ・時間の関係をつかんでいないので

「私は速さの問題があまり好きでなかったので、自分の体験から言うと、『速さ×時間＝道のり』という関係式を、上手く使いこなせるようになるのに、ひと山あると思う。」(Iさん)

「速さ、時間、距離と一見全く違いそうなものが、そのうち2つが分かれば、かけ算、わり算という方法でもう一つが分かるというこの概念は難しいため、右のような覚えるための図を教えることがあった。

全く想像のつかない文章題でも、文章中の数字が何を表すか(速さなのか、時間なのか、距離なのか)さえ分かれば、答えが出てしまうということが起こりうる。

すると、応用がきかないため、以下のような間違いが起こる。

(例1)

時速4 kmで歩くA君が45分間歩いた。何km進みましたか？

(誤答例)

$$4 \times 45 = 180 \quad \text{答え} \quad 180 \text{ km}$$

- ・単位変換できない。
- ・想像できないため180 km という答えが出てもおかしいと思わない。

(例2)

1時間で6 km進む乗り物があります。3時間ではどれだけ進むでしょう。

(誤答例)

$$6 \div 3 = 2 \quad \text{答え} \quad 2$$

- ・『時間に6 km』を距離6 kmととる。
- ・例1と異なり、『何km進んだか』と問いかけがないため、単位をつけられない。

これらは私自身の小学生時代の間違いです。」(Mさん)

Mさんのレポートの中に出てきた図については、多くの人がふれていた。

「速さの問題では、速さ・時間・距離の3つの関係を考えて、解いていかなければなりません。この3つの関係は小学校で初めて習い、よく先生が黒板に図1のような図を書いて下さいました。また、『速さ・時間・距離が出てくる文章題を解く時にはこの図を書いてやれば、必ず解けます。』というように言われました。ところが、実際、テストになって、自分でこの図を書こうとすると、『距離はどこだったかな？』と分からなくなってしまったことが何回かありました。今はもちろん理解し

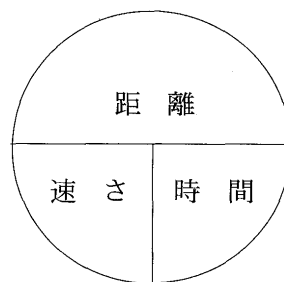
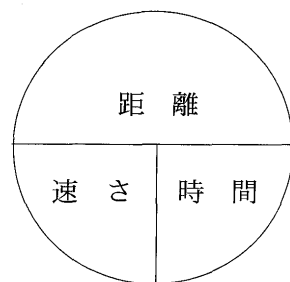


図 1

ているけれど、あの頃は『速さ』についての考え方を充分理解していなかったのだと思います。」(Nさん)

「時間＝距離／速さなどと、最初は別々に習ったので、1つ1つ覚えようとしたけど、すぐには覚えられず、苦労したし、嫌いになっていた、けど、それを友達に話したら、その友達は図1のような図を書いて教えてくれた。これならすぐに覚えられて、わかりやすいなあ、と感動し、すごくうれしかったことを覚えている。」(Iさん)

賛否両論ある図であるが、速さ・時間・距離の関係を理解した上で学ばないと、形式的な理解に終わってしまう危険性があると思われる。

4. 文章に書かれていることを式にするのが難しいため

学生のレポートの中でもっとも多く困難の在りかとしてとりあげられていたのが、文章に表されていることを式にすることであった。

「数字が4つも出てくるので、頭が混乱して何から手をつけていいものか分からない。(中略)

兄が出発したときには、もうすでに弟は学校へ向かう道の途中であり、兄と弟の間には距離があるということを理解しなければならない。文章題は本当に問題を解く上で必要なことしか書かれていないため、どのような状況であるのかくわしく考えなければならない。」(K君)

「 x を使って表す他のものが x に対してプラスなのかマイナスなのか、かけるのか割るのか、そういうことを理解できなければ x を使って式をたてるのが難しい。」(Iさん)

「『4分後』という時間差をどう式と結びつけるかが難しい。」(Iさん)

「『追いつく』という状況をどう等式にするかが難しい。」(Nさん)

「問題文には『追いつく』と書いてあるだけで、『距離が等しい』とは書いていない。しかし、『距離が等しい』という考え方がなければ立式することはできない。」(Y君)

「何と何が等しくなるのか、わからない。」(Nさん)

「問題文に距離もしくはその類の単語が一つも出てきていない。」(M君)

「ものの数ならまだしも、目にはっきりしない時間が目にはっきりしない未知数 x となって問題に出てくるのだから、よけいにイメージがわきにくい。」(S君)

最後のS君の意見は、1年生でこの問題を学ぶころは、まだ文字式の計算に慣れていないという意見も含まれていると考えられる。

5. 図を書いたり、実験するのが難しいため

「速さの問題は、かなり工夫しないと図が書きにくい。」(N君)

N君は、家庭教師先で、生徒と時間をかけながら、工夫して図を書くという経験をした。すると、生徒もある程度良い図が書けるようになり、問題もそこそこ解けるようになったとのことである。

「一次方程式の個数に関する文章題のように、自分で経験したり、数えてみたりできるものとは違って、『速さ』については、自分で経験したり、動いてみたりすることが少ないと思った。(Nさん)

6. 今後の方向性

学生が、1次方程式の速さの文章題における困難の在りかとしてとりあげたものを大ざっぱに分類してみた。

今後の方向性としては、まず、困難のありかとしてあげられた1つ1つのことがら分析し、それらの関連を探ることを試みたい。

そして、一般に子どもたちはどういうところに困難を感じやすいかを追究し、その上で、指導のあり方を考えていきたい。

(注1) 内観的方法の基本的アイディアおよび用語は

小浜逸郎「方法としての子ども」(ちくま学芸文庫 1996) P113 および

小浜逸郎「大人への条件」(ちくま新書 1997) P46 ~ 51による。

(注2) 引用は

岡本ゆかり「低学年の文章題」

吉田 甫・多鹿 秀継 編著 「認知心理学からみた 数の理解」 (北大路書房 1995) に収録による。

(注3) たとえば、「兄は弟が出てから4分後に家を出て弟を追いかけた。」という文章を、「兄は、弟が出てから4分後に家を出て、先に出発してもう何メートルか歩いている弟を追いかけた。」と変えるとかなり問題文の理解が深まるだろうと考えられる。(実は立式のヒントにもなっている。)

ただし、学生からの指摘にもあるように、数学の文章題においては(伝統的に?) 必要最小限の文章にしてしまおう、という習慣があり、筆者自身もこのような文章での出題をしたことはない。